
समीक्षा

गोवर्स का वेबलॉग

हाउ क्रेग बार्टन विशेस ही हेड टॉट मैथ्स

(क्रेग बार्टन किस तरह गणित पढ़ाना चाहते हैं)

सर विलियम टिमोथी गोवर्स

मुख्य शब्द : *गणित, शिक्षण-विधि, विश्वास, भुला देना, सीखना*

कुछ महीने पहले, मुझे ठीक-ठीक याद नहीं कि कैसे, मुझे क्रेग बार्टन की किताब *हाउ आई विश आई हेड टॉट मैथ्स* के बारे में पता चला। ऐसा मालूम होता है कि यह किताब काफ़ी सोच-समझकर लिखी गई है। मूल बात यह थी कि क्रेग बार्टन एक अनुभवी (और मैंने पढ़ा था कि कि वे बहुत अच्छे) गणित-शिक्षक थे, जो शिक्षण के कई पहलुओं को तब तक सही मानते थे जब तक कि उन्होंने गणित-शिक्षा के साहित्य को नहीं देखा था और फिर उन्हें पता चला कि उनके कई पोषित विश्वास पूरी तरह से ग़लत थे। मेरे अपने विश्वविद्यालयीन शिक्षण के कारण और समय-समय पर स्कूल स्तर पर शिक्षण के बारे में बात करना मुझे पसन्द है— इन दोनों वजहों से मुझे हमेशा इस बात में दिलचस्पी रही है कि गणित को सबसे अच्छी तरह कैसे पढ़ाया जाए। इसलिए मैंने इस पुस्तक को ऑर्डर करने का फ़ैसला लिया। पुस्तकों को ख़रीदने के अपने पिछले इतिहास को देखते हुए मुझे लगा था कि मैं इसे पढ़ लूँगा। ज़्यादा हैरानी की बात तो यह है कि मैंने इसके कवर से कवर तक के सभी 450 पृष्ठ पढ़े।

जैसा कि होता है यह पुस्तक आदर्श रूप से उन लोगों के लिए बनाई गई है जो इसे कवर-से-कवर तक पूरी नहीं पढ़ना चाहते हैं। इसलिए इसे निम्नानुसार व्यवस्थित किया गया है। सबसे पहले इसे अध्यायों में बाँटा गया है। प्रत्येक अध्याय एक छोटे-से परिचय के साथ शुरू होता है और उसके बाद इसे खण्डों में विभाजित किया गया है। और प्रत्येक खण्ड भी हूबहू भी एक ही तरह से व्यवस्थित है : इसे 'व्हॉट आई यूज़्ड टू बिलीव', 'सोर्सेज़ ऑफ़ इंसपिरेशन', 'माई टेकअवे'और 'व्हॉट आई डू नाऊ' शीर्षक वाले उपखण्डों में विभाजित किया गया है। यह काफ़ी हद तक स्वत: स्पष्ट हैं। लेकिन केवल इसे और स्पष्ट करने के लिहाज़ से देखें, तो पहला उपखण्ड एक विश्वसनीय मान्यता को व्यक्त करता है जो क्रेग बार्टन के पास अच्छे शिक्षण-अभ्यास के बारे में हुआ करती थी। यह उपखण्ड अक्सर एक आलंकारिक प्रश्न के साथ समाप्त होता है, मसलन "इसमें क्या ग़लत हो सकता है?" दूसरा उपखण्ड सन्दर्भों की एक सूची है (जिनमें से मैंने अभी तक किसी को भी नहीं देखा है, लेकिन उनमें से कुछ बहुत दिलचस्प लगती हैं)। तीसरे उपखण्ड में इस बात पर चर्चा है कि उन्होंने सन्दर्भों से क्या सीखा। और आख़िरी उपखण्ड इस बारे में है कि उन्होंने इसे व्यवहार में कैसे उतारा। इसके अलावा प्रत्येक

अध्याय 'इफ आई ओन्ली रिमेम्बर थ्री थिंग्स... ' शीर्षक के एक छोटे उपखण्ड के साथ समाप्त होता है, जिसमें वे तीन वाक्य लिखते हैं जो उनके अनुसार उस अध्याय की सबसे महत्त्वपूर्ण तीन बातों का सार प्रस्तुत करते हैं।

पुस्तक पढ़ते समय मेरे मन में एक सवाल था कि क्या इसमें से कोई भी विश्वविद्यालय स्तर पर शिक्षण के लिए व्यवहारिक होगा। मैं अभी भी आश्वस्त नहीं हूँ कि मैं इस बारे में क्या सोचता हूँ। न सोचने का एक कारण है, क्योंकि इस पुस्तक का फोकस काफ़ी हद तक स्कूल स्तर के शिक्षण पर है और इस स्तर पर सामने आने वाली कई चुनौतियाँ स्पष्ट रूप से विश्वविद्यालय स्तर के अनुकूल नहीं हैं। उदाहरण के लिए, उन्होंने निम्नलिखित आकर्षक प्रयोग का उल्लेख किया (पृष्ठ 235 पर), जहाँ लोगों से निम्नलिखित बहुविकल्पीय सवाल को हल करने और फिर अपने उत्तरों को सही ठहराने के लिए कहा गया।

इनमें से कौन-सा मान प्रायिकता को नहीं दर्शा सकता है?

अ. 2/3

ब. 0.72315

स. 1.46

द. 0.002

इस सवाल की चर्चा के लिए मैं इस पुस्तक को ही उद्धृत करता हूँ।

> निश्चित रूप से यह नियम कि *प्रायिकता 1 के बराबर या उससे कम होनी चाहिए* लगभग उतना ही सरल है, जितना कि गणित में हो सकता है? लेकिन फिर 5000 से ज़्यादा विद्यार्थियों में से 47% ने इस सवाल का ग़लत उत्तर क्यों दिया?
>
> कुछ विद्यार्थियों के स्पष्टीकरण से इस बारे में काफ़ी कुछ पता चलता है :
>
> *मुझे लगता है कि 'ब' क्योंकि सिर्फ़ इसमें दशमलव के बाद बहुत अंक हैं और बाक़ी सभी काफ़ी वैध लगते हैं। मुझे नहीं समझ आता कि इतनी बड़ी कोई संख्या कैसे सही हो सकती है।*
>
> *मुझे लगता है कि 'ब' क्योंकि आपको यह संख्या प्रायिकता के सवालों में नहीं मिलेगी।*
>
> *मुझे लगता है कि 'द' क्योंकि आपके पास उत्तर के रूप में 0.002 नहीं हो सकता क्योंकि यह बहुत कम है।*

यदि विद्यार्थियों को उदाहरणों और अभ्यास प्रश्नों के दौरान केवल 'अच्छी-दिखने वाली' प्रायिकताओं को हल करने के मौक़े मिले हों, तो इसमें आश्चर्य की कोई बात कि जब वे अजीब-से दिखने वाले उत्तरों से रूबरू हों तो अनपेक्षित रूप से असफल हो जाएँ।

क्या विश्वविद्यालय स्तर के लिए ऐसा कोई सवाल तैयार किया जा सकता है जिसमें लोगों का एक बड़ा हिस्सा इसी तरह की स्थिति में फँस जाए? मुझे यक़ीन तो नहीं है, लेकिन यहाँ एक प्रयास किया गया है।

निम्नलिखित में से कौन जोड़ और अदिश गुणन की स्पष्ट धारणा वाला एक सदिश स्थल (vector space) नहीं है?

अ. सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय।

ब. (0, 1) से R तक सभी फलनों का समुच्चय, जिनका दोहरा अवकलन हो सके।

स. वास्तविक गुणांक वाले x में सभी बहुपदों का समुच्चय, जिसका एक गुणनखण्ड x^2+x+1 हो।

द. पूर्णांकों के सभी तिर्यकों (a, b, c) का समुच्चय।

इ. सभी अनुक्रमों (x_1,..........x_n) $\in R^n$ का समुच्चय, जिसमें कि $x_1 + \cdots + x_n = 0$ और $x_1+2x_2+\cdots+nx_n = 0$।

मुझे लगता है कि कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय में लगभग सभी लोग इस सवाल को सही हल कर लेंगे (हालाँकि मैं इसकी जाँच करना पसन्द करूँगा)। लेकिन कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय के गणित के स्नातक स्तर के विद्यार्थियों को विशेष रूप से गणित का अध्ययन करने के लिए चुना गया है। शायद किसी अमेरिकी विश्वविद्यालय में अपने मुख्य विषय का चयन करने से पहले लोग किसी अन्य विकल्प (जैसे कि 'ब', क्योंकि सदिश स्थलों का सम्बन्ध बीजगणित से है और कलन के साथ नहीं है) को चुनने की ओर आकर्षित हो सकते हैं, इस बात पर ध्यान दिए बिना कि 'द' में आने वाले स्पष्ट अदिश एक क्षेत्र (field) का निर्माण नहीं करते हैं। या शायद वे 'अ' को पसन्द नहीं करेंगे क्योंकि अदिश क्षेत्र, सदिशों के समुच्चय के समान है (जब तक कि उन्होंने यह नहीं सोचा था कि स्पष्ट अदिश वास्तविक संख्याएँ थीं)।

सामान्यत: मुझे लगता है कि कुछ प्रकार की ग़लतियाँ हैं जो आमतौर पर स्कूल स्तर पर की जाती हैं। लेकिन वे विश्वविद्यालय स्तर पर बहुत कम पाई जाती हैं क्योंकि जो लोग उस स्तर तक पहुँचने के लिए लम्बे समय तक संघर्ष करते रहते हैं वे इस तरह की ग़लतियाँ नहीं करने के लिए प्रशिक्षित हो जाते हैं। उदाहरण के लिए, विश्वविद्यालय स्तर पर हम औपचारिक परिभाषाओं के अभ्यस्त हो जाते हैं। एक बार जब इनका उपयोग करने की आदत हो जाती है, तो कोई रचना सदिश स्थल है या नहीं यह तय करने के लिए बस यह देखने की आवश्यकता होती है कि क्या उस पर सदिश स्थल की परिभाषा लागू होती है, बजाय यह सोचने के कि, " क्या यह उन सदिश स्थलों जैसा दिखता है जिनसे मैं पहले से परिचित हूँ?" हम एक ऐसी संस्कृति का भी हिस्सा बन जाते हैं, जहाँ अवधारणाओं के तर्कहीन-या कम-से-कम थोड़ा आश्चर्यजनक उदाहरणों इत्यादि को देखना आम बात है।

इस पुस्तक को पढ़ने का एक और कारण यह था कि स्कूल स्तर पर गणित-शिक्षण के बारे में मेरे कुछ पूर्वाग्रह हैं और मुझे यह जानने में दिलचस्पी थी कि यह पुस्तक उन्हें और सुदृढ़ करेगी या उन्हें चुनौती देगी। एक तरह से यह दोहरे फ़ायदे की स्थिति थी क्योंकि अपने पूर्वाग्रहों की पुष्टि होना हमेशा अच्छा होता है, लेकिन यह पता लगाना भी रोमांचक होता है कि जो स्पष्ट रूप से सही लगता है, वह वास्तव में ग़लत है।

एक पूर्वाग्रह जिसकी दृढ़ता से पुष्टि की गई थी वह था गणितीय सहजता (mathematical fluency) का महत्त्व। बार्टन कहते हैं और मैं उनसे सहमत हूँ (और मैंने अपनी पुस्तक *मैथेमेटिक्स, ए वेरी शॉर्ट इंट्रोडक्शन* में ऐसा कुछ सुझाया भी है) कि अक्सर पहले इस सहजता को सिखाना और बाद में समझाना एक अच्छा तरीक़ा होता है। अधिक सटीक रूप से यह तय करने के लिए कि क्या यह एक अच्छा तरीक़ा है, हमें इस बात का आकलन करना चाहिए कि (i) कोई विधि क्यों काम करती हैं, इसका स्पष्टीकरण देना कितना मुश्किल है और (ii) कोई विधि कैसे काम करती है यह जाने बिना उसे लागू करना सीखना कितना मुश्किल है।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि आप ऋणात्मक संख्याओं का गुणा सिखाना चाहते हैं। यह नियम कि "यदि संख्याओं के चिह्न समान हैं तो उत्तर धनात्मक होगा, और यदि उनके चिह्न अलग-अलग हैं तो उत्तर ऋणात्मक होगा" एक छोटा और सीधा नियम है। लेकिन यह समझाना बहुत आसान नहीं है कि -2 गुणा -3, 6 के बराबर क्यों होना चाहिए। इसलिए यदि आप स्पष्टीकरण के साथ शुरू करते हैं, तो इस विचार को व्यक्त करने का एक बड़ा जोखिम है कि ऋणात्मक संख्याओं का गुणा एक कठिन, जटिल विषय है। जबकि यदि आप अपने विद्यार्थियों को सरल नियमों को लागू करने के बहुत-से अभ्यास करने दें, तो आप उन्हें किसी संक्रिया को सहजता से करना सिखा सकते हैं, जो कई अन्य सन्दर्भों में भी उपयोगी है {जैसे कि $(x - 3)$ को $(x - 2)$-से गुणा करना}। और बाद में जब वे इस नियम के साथ सहज हो जाएँ तब आप इसे सही ठहराने की कोशिश कर सकते हैं। मुझे यह सोचने की चुनौती का आनन्द लेना याद है कि एक भिन्न को दूसरे द्वारा विभाजित करने का नियम सही क्यों था। लेकिन यह बहुत समय बाद की बात है, तब तक मैं बिना वजह जाने इस नियम का उपयोग करके ख़ुश था। मुझे याद नहीं कि उस समय तक मैं इसके स्पष्टीकरण के न होने से ज़रा भी परेशान था।

एक अलग तरह के उदाहरण के रूप में बार्टन रैखिक समीकरणों को हल करने के बारे में बात करते हैं। इसमें जोखिम यह है कि आप $2x + 3 = 17$ जैसे समीकरणों को हल करने की प्रक्रिया सीख सकते हैं, उसमें माहिर हो जाते हैं और फिर $4 - 2x = 3x – 11$ जैसे समीकरण को हल करते समय पूरी तरह से उलझ जाते हैं। यहाँ थोड़ी बहुत अवधारणात्मक समझ से बहुत मदद मिल सकती है। बार्टन बैलेंस मेथड नामक एक विधि की वकालत करते हैं। इस विधि में आप यह मानते हैं कि एक समीकरण के दोनों पक्ष बराबर होते हैं और आपको यह सुनिश्चित करने की आवश्यकता होती है कि यह पूरे समय बराबर ही रहें। मुझे लगता है (लेकिन इस पुस्तक को पढ़ने के बाद थोड़ा कम आत्मविश्वास के साथ) कि मैं लगभग इसी तरह की बात कहूँगा, लेकिन इसके बिलकुल समान नहीं, जो कि इस नियम पर ज़ोर देना है

कि *आप समीकरण के दोनों पक्षों पर एक जैसी प्रक्रिया कर सकते हैं* (कुछ बातों के बारे में मैं सोच में पड़ जाता हूँ मसलन जब दोनों पक्षों का वर्ग करना हो या बाद में शून्य से गुणा करना हो)। तब रैखिक समीकरणों को हल करने की समस्या एक प्रकार की पहेली में बदल जाएगी : हम इस समीकरण के दोनों पक्षों में ऐसा क्या कर सकते हैं ताकि पूरा समीकरण सरल लग सके?

यह आख़िरी सवाल किताब में उल्लिखित एक और आकर्षक भाग से सम्बन्धित है। बार्टन एक समान्तर चतुर्भुज ABCD से सम्बन्धित सवाल का उदाहरण देते हैं, जहाँ A पर 105 डिग्री का कोण है। रेखा BC को बिन्दु E तक बढ़ाया जाता है, जो एक अन्य रेखाखण्ड से बिन्दु D पर मिलती है और कोण CED30 डिग्री का है। सवाल यह सिद्ध करना है कि त्रिभुज CED एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

स्पष्ट रूप से, यह सवाल कठिन लगता है क्योंकि आप एक चरण में इसे हल नहीं कर सकते। इसके बजाय आपको यह देखना चाहिए कि समान्तर चतुर्भुज का C कोण भी 105 डिग्री का है, जिससे यह पता चलता है कि कोण ECD 75 डिग्री का होगा। और फिर इसके फलस्वरूप कोण EDC भी 75 डिग्री का होगा। और इस प्रकार हमें सवाल का हल मिल गया।

लेकिन दिलचस्प बात यह है कि यदि आप इस सवाल को और अधिक खुले प्रश्न (open-ended) में बदलते हैं—जैसे कि "इस चित्र में आप जितने कोण भर सकते हैं, भरें"— तो कई लोगों को जिन्हें इसका लक्ष्य-केन्द्रित संस्करण बहुत कठिन लगता है, उन्हें इसे भरने में कोई कठिनाई नहीं होती और इसलिए वे यह देख पाते हैं कि त्रिभुज CED एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

समीकरणों वाले सवाल से मैं जो सबक़ लूँगा, वह यह है कि समीकरण $4 - 2x = 3x - 11$ का हल निकालने के लिए कहने की बजाय यह पूछना बेहतर हो सकता है, "देखें कि क्या आप इस समीकरण के दोनों पक्षों में कुछ करके इसे सरल बना सकते हैं। यदि आप यह कर पाते हैं, तो देखें कि क्या आप इसे और अधिक सरल बना सकते हैं। यह प्रक्रिया तब तक जारी रखें जब तक आप इसे उतना सरल न बना लें जितना कि आप बना सकते थे।" यह निश्चित रूप से तब सम्भव होगा जब वे पहले से ही इस तरह के कई उदाहरण देख चुके हों कि एक समीकरण के दोनों पक्षों में क्या-क्या किया जा सकता है।

बार्टन पाठक को केवल यह बताकर सन्तुष्ट नहीं होते कि शिक्षण के कुछ तरीक़े दूसरों की तुलना में बेहतर हैं : वे हमें इसके पीछे के सिद्धान्त भी बताते हैं। वे दावा करते हैं कि विशेष महत्त्व का तथ्य यह है कि हम अपनी अल्पकालिक स्मृति में बहुत सारी बातें नहीं रख सकते हैं। यह बात मुझे बेहद लुभावनी लगी, क्योंकि एक लम्बे अरसे से मेरा यह विश्वास बना है कि हमारी अल्पकालिक स्मृति की सीमित क्षमता इस सवाल के जवाब का एक बेहद महत्त्वपूर्ण हिस्सा है कि गणित जैसा दिखता है, वैसा क्यों दिखता है। इससे मेरा मतलब है कि अच्छी तरह से गढ़े जा सकने वाले सभी गणितीय कथनों में से जो हमें दिलचस्प लगते हैं, वे वही

ख़ास गणितीय कथन क्यों होते हैं। मैंने इस बारे में लिखा भी है (मैथमेटिक्स, मेमोरी और मेंटल अरिथमेटिक शीर्षक वाले लेख में, जो एक पुस्तक में छपा है, लेकिन ऑनलाइन उपलब्ध नहीं है। लेकिन मैं किसी समय इसके बारे में कुछ करने की कोशिश कर सकता हूँ)।

यह मूल बात इस पुस्तक में की गई चर्चा के बारे में बहुत कुछ बताती है। उदाहरण के लिए, एक सवाल पर विचार कीजिए जिसमें आप विद्यार्थियों से एक आयत का परिमाप खोजने को कहते हैं, जिसकी भुजाओं की लम्बाई 2/3 और 3/5 थी। यह एक बढ़िया सवाल हो सकता है, लेकिन विद्यार्थियों के विकास के चरणों में इसे सही समय पर पूछना बहुत महत्त्वपूर्ण है। यदि आप इसे भिन्नों के जोड़ और आयत के परिमाप के सवालों को हल करने में पारंगत होने से पहले पूछते हैं तो इस स्थिति में ज्ञान की जितनी मात्रा उन्हें अपने दिमाग़ में अर्जित करनी होगी, वह उनकी संज्ञानात्मक क्षमता से अधिक हो सकती है : उन्हें इस तथ्य को याद रखने की आवश्यकता है कि दोनों लम्बाइयों को जोड़ना है और 2 से गुणा करना है और दोनों भिन्नों को एक समान हर वाली बनाना है। यह इस तरह के तनाव से बचने के लिए है कि गणितीय सहजता को प्राप्त करना बहुत महत्त्वपूर्ण है : वास्तव में यह सोचने को, और विशेष रूप से उन दिलचस्प सवालों को हल करने के बारे में सोचने को आसान बनाता है, जिनके लिए हम सभी चाहेंगे कि विद्यार्थी उन्हें हल करने में सक्षम हों। बार्टन गणित के विभिन्न हिस्सों को मिलाने वाले दिलचस्प सवालों के महत्त्व पर बिलकुल भी विवाद नहीं करते– बहुत यक़ीन के साथ उनका तर्क होता है कि हमें इस बात के लिए सावधान रहना होगा कि इनसे कब अवगत कराया जाए।

एक आइडिया जिसकी वे बहुत चर्चा करते है और मुझे लगता है कि विश्वविद्यालय स्तर के शिक्षण में शायद इसकी कोई भूमिका हो सकती है, उसे वह पड़ताल (diagnostic) के सवाल और विशेष रूप से कम-दाँव के पड़ताल परीक्षण (low-stakes diagnostic tests) कहते हैं। यह आमतौर पर एक छोटी बहुविकल्प प्रश्नोत्तरी का रूप लेता है और वे एक ऐसी कक्षा संस्कृति बनाने के लिए बहुत प्रयास करते हैं, जहाँ लोग समझें कि इस प्रश्नोत्तरी का उद्देश्य मूल्यांकन नहीं है– यह प्रश्नोत्तरी किसी भी चीज़ के लिए 'गिनी' नहीं जाती है –बल्कि यह एक टूल है जो सीखने में मदद करता है और विशेष रूप से समझ के साथ सवालों की पड़ताल करने में मदद करता है।

जो बात इन सवालों को 'पड़ताल' का सवाल बनाती है, वह यह है कि इन्हें सावधानीपूर्वक इस तरह डिज़ाइन किया गया है कि यदि आपकी किसी अवधारणा के बारे में ग़लत समझ है तो आप निश्चित तौर पर ग़लत उत्तर की ओर जाएँगे। यानी कि लोगों द्वारा दिए जाने वाले ग़लत उत्तर केवल ग़लत होने की बजाय शिक्षक को सूचना देने वाले होते हैं। उदाहरण के लिए, नीचे एक ऐसा सवाल दिया है जो कि पड़ताल करने में विफल रहा है और फिर इसका एक संशोधित संस्करण दिया जाता है जो पड़ताल करने में सफल होता है।

एक त्रिभुज की एक भुजा की लम्बाई 6 और अन्य दो भुजाओं की लम्बाई 5 है। उसका क्षेत्रफल क्या होगा?

अ. 8	अ. 6
ब. 11	ब. 12
स. 12	स. 15
द. 15	द. 16
इ. 20	इ. 24
	फ. 30

विकल्पों के दूसरे सेट में दिए गए प्रत्येक उत्तर को पाने का एक सम्भावित तरीक़ा है और आप यह कल्पना कर सकते हैं कि कोई विद्यार्थी इनमें से किसी भी तरीक़े को अपना सकता है। उत्तर 6 प्राप्त करने के लिए कोई विद्यार्थी इस त्रिभुज को दो समकोण त्रिभुजों में काटता है, जिनमें से प्रत्येक की ऊँचाई 4 और आधार 3 है। वह उनमें से एक त्रिभुज के क्षेत्रफल की गणना करता है और इसे दोगुना करना भूल जाता है। इसका सही उत्तर 12 होगा। 15 प्राप्त करने के लिए कोई क्षेत्रफल का सूत्र 'आधार गुणा ऊँचाई का आधा' लेता है, लेकिन वह ऊँचाई के स्थान पर 5 रखता है। 16 प्राप्त करने के लिए कोई परिमाप की गणना करता है। 24 प्राप्त करने के लिए कोई आधार से ऊँचाई का गुणा करता है। और 30 प्राप्त करने के लिए कोई दो संख्याओं 6 और 5 को एक साथ गुणा करता है (इस आधार पर कि - क्षेत्रफल की गणना करने के लिए दो संख्याओं को एक साथ गुणा करना होता है)। इस प्रकार, ग़लत उत्तर उपयोगी जानकारी देते हैं। उत्तरों के पहले सेट के साथ ऐसा नहीं है–इस बात की सम्भावना अधिक है कि वे पूरी तरह अनुमान पर आधारित हों।

यहाँ यह बात उल्लेखनीय है कि टेरेंस ताओ ने विश्वविद्यालय स्तरीय विषयों पर कई बहु-विकल्पीय सवाल (http://scherk.pbworks.com/w/page/14864181/FrontPage) बनाए हैं। उन्होंने इसके बारे में ब्लॉग भी लिखा है (https://terrytao.wordpress.com/2008/12/14/on-multiple-choice-questions-in-mathematics/)। यह एकदम उस अर्थ में पड़ताल वाले सवाल नहीं हैं जिस अर्थ में बार्टन बात कर रहे हैं, लेकिन आप इन्हें इस प्रकार के सवालों में तब्दील करने की कल्पना कर सकते हैं।

बार्टन किसी नए विषय की चर्चा शुरू करने से पहले अपनी कक्षा की समझ के बारे में अधिक स्पष्ट तस्वीर पाने के लिए कक्षा में केवल कुछ प्रश्न पूछने और कुछ उत्सुक विद्यार्थियों से उनके जवाब पाने की बजाय इन पड़ताल परीक्षणों का उपयोग करते हैं। यदि वह एक काफ़ी गम्भीर सामूहिक ग़लतफ़हमी को देख पाते हैं, तो वे कमज़ोर नींव पर निर्माण करने की व्यर्थ कोशिश करने के बजाय उससे निपटने में समय लगाएँगे।

मैं थोड़ी बहुत यहाँ-वहाँ की बातें कर रहा हूँ। लेकिन सहज ज्ञान से थोड़ा विपरीत एक आइडिया जिसकी वे वकालत करते हैं (जो कि ज़ाहिर तौर पर गम्भीर शोध द्वारा समर्थित है) उसे वह पूर्व-परीक्षण कहते हैं। इसका मतलब यह है कि लोगों का ऐसी सामग्री से परीक्षण करना जो उन्हें अभी तक नहीं सिखाई गई है। जब तक यह सावधानीपूर्वक किया जाता है, ताकि यह विद्यार्थियों को पूरी तरह से हतोत्साहित न कर दे, यह बहुत उपयोगी साबित होता है। क्योंकि यह मस्तिष्क को उस विचार के प्रति ग्रहणशील होने के लिए तैयार करता है जो उसे परेशान करने वाले सवालों को हल करने में मदद करेगा। और वास्तव में, इस आइडिया के अभ्यस्त होने के एक पल बाद मैंने पाया कि यह बिलकुल भी सहज ज्ञान के विपरीत नहीं है। वास्तव में, यह एक शोध गणितज्ञ के रूप में मेरे अनुभव के साथ बहुत दृढ़ता से प्रतिध्वनित होता है : मुझे एक नियम के रूप में अन्य लोगों के पेपर पढ़ना बहुत कठिन लगता है। लेकिन अगर वे उस सवाल को हल करने में मेरी मदद कर सकते हैं जिस पर मैं काम कर रहा हूँ, तो यह कठिनाई काफ़ी हद तक कम हो जाती है। क्योंकि मुझे अच्छे-से पता है कि मैं क्या चाहता हूँ और मैं जिस महत्त्वपूर्ण आइडिया की तलाश कर रहा हूँ यह मुझे वह देगा।

इस पुस्तक में ‘आम जीवन’ के काल्पनिक सवालों के उपयोग पर एक बढ़िया हिस्सा है। मुझे लगता है कि मैथ्स ए-लेवल के उपयोग के बारे में (https://gowers.wordpress.com/2009/07/11/help-im-stuck-in-my-ivorytower/) वे मुझसे सहमत होंगे। जैसा कि वे किसी के कथन का सन्दर्भ देते हैं, "विद्यार्थी दिलचस्पी लेकर सीखने का लगातार विरोध करते हैं।" एक उदाहरण जिसकी वे चर्चा करते हैं, इस प्रकार है :

एलन एक पाइंट बीयर का 5/8 भाग पीता है। उसके पेय का कितना हिस्सा बचा है?

यदि इस अभ्यास का मुख्य मक़सद भिन्नों को सहजता से घटा पाने का कौशल हासिल करना है तो वह सिर्फ़ बेकार की बातों को हटाने की वकालत करते हैं और उनसे 1-5/8 की गणना करने को कहते हैं, जिससे मैं 100% सहमत हूँ।

दूसरी ओर, यदि यह आम जीवन की अनावश्यक बातों को हटाकर बुनियादी गणित तक पहुँचने के लिए एक अभ्यास के रूप में तैयार किया गया है तो उनके पास सतही संरचना (surface structure) और गहरी संरचना (deep structure) के बारे में कहने के लिए कई दिलचस्प बातें हैं (जो इसी पुस्तक में आगे दी गई हैं)। इनमें से पहली किसी सवाल के उन तत्वों से सम्बन्धित है, जो अपने आप सीधे विद्यार्थी के सामने प्रस्तुत होते हैं- जैसे इस मामले में एलन और बीयर हैं -जबकि गहरी संरचना बुनियादी गणितीय अवधारणा से जुड़ी है। लोगों को गहरी संरचना को समझने में प्रशिक्षित करने के लिए उन्हें एक ही सतही संरचना और विभिन्न गहरी संरचनाओं के कुछ सवाल देना बहुत महत्त्वपूर्ण होगा और इसी तरह इसके विपरीत सवाल देना भी। अन्यथा वे एक ऐसी प्रक्रिया सीख सकते हैं जो कई समान उदाहरणों के लिए तो काम करती है पर जैसे ही अलग गहरी संरचना वाला कोई नया उदाहरण सामने आता है, वैसे ही उन्हें इसमें कठिनाई आने लगती है।

पुस्तक में और भी बहुत कुछ है– इसकी लम्बाई को देखते हुए यह ज़ाहिर है –लेकिन मुझे उम्मीद है कि यह लेख इस पुस्तक का कुछ तो अन्दाज़ा देता है। मैं इसके बारे में केवल एक नकारात्मक बात बोलने की सोच सकता हूँ, वह यह कि इसमें "फ्लिपिंग" शब्द का अत्यधिक उपयोग किया गया है– वाक्य "टीचिंग इज़ फ्लिपिंग हार्ड" कई बार दिख जाता है, जबकि एक किताब में एक बार होना पर्याप्त होगा। लेकिन अगर आप इस तरह के थोड़े-से मज़ाक के लिए तैयार हैं तो मैं इसकी सिफ़ारिश करता हूँ, क्योंकि मैंने पाया कि यह बहुत ही विचारोत्तेजक है। मैं अभी तक नहीं जानता कि इस उत्तेजना का परिणाम क्या होगा, लेकिन मुझे पूरा यक़ीन है कि कुछ-न-कुछ तो ज़रूर होगा।

इस समीक्षा को प्रोफ़ेसर टिमोथी गोवर्स की अनुमति से पुनर्प्रकाशित किया गया है। मूल समीक्षा प्रोफ़ेसर गोवर्स के वेबलॉग, https://gowers.wordpress.com/2018/12/22/how-craig-barton-wishes-hed-taught-maths/ में प्रकाशित हुई थी।

सर विलियम टिमोथी गोवर्स एफआरएस कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय के प्योर मैथमेटिक्स एंड मैथमेटिकल स्टेटिस्टिक्स विभाग में एक रॉयल सोसाइटी रिसर्च प्रोफ़ेसर हैं। वहाँ वे राउज़ बॉल के अध्यक्ष और ट्रिनिटी कालेज, कैम्ब्रिज के फेलो भी हैं। 1998 में, उन्होंने फंक्शनल एनालिसिस और कॉम्बिनेटरिक्स के क्षेत्रों को जोड़ने के शोध के लिए फील्ड्स मेडल प्राप्त किया। प्रोफ़ेसर गोवर्स को गणित की शिक्षा में गहरी दिलचस्पी है और उनके विचार और अन्तर्दृष्टि उनके वेबलॉग (https://gowers.wordpress.com/) पर पढ़ी जा सकती है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग** : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही